

Домашняя работа №5. Математический кружок.

№1 Найдите прямую, проходящую через точку $A(1;1)$ и перпендикулярную прямой $y = 4x - 2$. Изобразите обе прямые на плоскости.

№2 Найдите прямую, проходящую через начало координат параллельную прямой $y = -30x + 29$. Нарисуйте обе прямые на плоскости.

№3 Решите задачи 1 и 2 в общем виде. Предположим, есть точка $A(x_0; y_0)$. Необходимо построить прямую проходящую через точку A так, чтобы она была а) перпендикулярна; б) параллельна прямой $y = kx + b$. Всегда ли найдется и притом единственная прямая удовлетворяющая условию (а); аналогичный вопрос для условия (б)?

№4 Используя лишь алгебраические преобразования найдите решение следующего уравнения $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 15 = 0$. *Подсказка:* попробуйте привести это уравнение к следующему соотношению $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, что, как вы знаете равно $(a + b)^3$, это легко проверить. Осталось только понять, какие должны быть a и b .

№5 Проверьте на четность, нечетность и монотонность дробно-линейную функцию, то есть функцию вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d – некоторые параметры.

Краткое пояснение к задаче №5.

Четность функции означает, что график функции является симметричным относительно оси ординат (Oy) или, что тоже самое, значение в точке x (при $x \geq 0$) равно значению в точке $-x$. То же самое можно записать аналитически $f(x) = f(-x)$ – пожалуй, это наиболее простой способ проверки на четность любой функции.

Нечетность функции означает, что график функции симметричен относительно нуля, то есть для любого положительного значения аргумента и значения в этой точке найдется симметричная точка относительно нуля такая, что значение аргумента (по оси Ox) и значение функции (по оси Oy) будет противоположным. По аналогии с четность, нечетность можно задать аналитически. Для того чтобы ответить на вопрос, является ли функция нечетной, необходимо проверить условие $f(-x) = -f(x)$. Или, что тоже самое, любая точка функции с координатами $(x_0; y_0)$ имеет симметричную ей $(-x_0; -y_0)$.

Монотонность функции. Функция называется *монотонной*, если ее график является возрастающей или убывающей функцией. Соответственно функция называется монотонной на отрезке $[a; b]$, если для любых двух точек x_1 и x_2 таких что $x_1 < x_2$ будет выполнено неравенство (1) $f(x_1) < f(x_2)$ или (2) $f(x_1) > f(x_2)$. Если всюду на отрезке выполнено только первое неравенство, тогда функцию называют строго возрастающей. Для второго неравенства функция называется строго убывающей. Если переписать неравенства с нестрогим знаком (1) $f(x_1) \leq f(x_2)$ или (2) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то мы получим для первого случая неубывающую функцию, для второго невозрастающую.

№6 Приведите примеры четных и нечетных функций, монотонных и немонотонных, строго возрастающих и строго убывающих, неубывающих и невозрастающих, не являющихся ни четными ни нечетными.

№7 Что вы можете сказать о четности, нечетности и монотонности следующих функций:

а) прямая;

б) парабола;

В каком случае эти функции будут иметь перечисленные свойства? Задайте аналитически (параметрически).