Домашняя работа №2. Математический кружок

О сколько нам открытий чудных
Готовят просвещенья дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг,
И случай, бог изобретатель...

А. С. Пушкин (1829)

Задачи.

№1 Определите, что из перечисленных является функцией. Выделите область определения и область значений функции. Каков способ задания функции?

А) $l = 2\pi r$ (формула длины окружности; π – константа, приблизительно равная $3{,}14$).

Б) $l = \pi r^2$ (формула площади круга).

В) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (формула объема шара).

Г) Отображение множества X в себя, то есть $f: X \to X$.

Д) $f(x,y) = \begin{cases} x + y, & x^2 + y^2 \geq 1 \\ -(x + y), & 2x + 3y < 1 \end{cases}$.

Е) Отображение множества X на множество Y ($f: X \to Y$), причем множество Y задается следующим образом $Y = \{y \in Y |\ y = 1\}$ (то есть множество Y, задается теми элементами y, которые равны единицы, в не зависимости от значений множества X). Изобразите данное отображение на плоскости.

Г) Отображение множества X на множество Y ($f: X \to Y$), причем множество Y задается следующим образом $Y = \{y \in Y |\ y = -y\}$ (то есть множество Y, задается теми элементами y, которые равны своим отрицательным значениям, в не зависимости от значений множества X). Изобразите данное отображение на плоскости.

№2 Докажите, что множество всех отрицательных целых чисел счетно.

№3 Докажите, что множество четных и нечетных чисел счетно.

№4 *Докажите, что всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

№5 *Докажите, что сумма любого конечного или счетного множества счетных множеств есть снова счетное множество.*

№6 *Докажите, что множество рациональных чисел счетно.*

№7 Докажите, что множество положительных и отрицательных рациональных чисел счетно. Обобщите результат на все множество рациональных чисел. Для этого докажите и воспользуйтесь утверждением из задачи №5. Иными словам, воспользуйтесь результатами данной задачи и задачи №5, для доказательства утверждения задачи №6.

№8 *Докажите, что множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей несчетно.*