Аксиоматика действительных чисел.

(I) Аксиомы сложения

Определено отображение (операция сложения) $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сопоставляющее каждой упорядоченной паре $(x,\ y)$ элементов x и y, из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y. При этом выполнены следующие условия:

1_+. Существует нейтральный элемент 0 (называемый в случае сложения нулем) такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2_+. Для любого нейтрального элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый противоположным к x, такой, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3_+. Операция + ассоциативна, т.е. для любых элементов x, y, z из $\mathbb{R}$ выполнено

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4_+. Операция + коммутативна, т.е. для любых элементов x, y из $\mathbb{R}$ выполнено

$$x + y = y + x.$$

(II) Аксиомы умножения

Определено отображение (операция умножения) $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сопоставляющее каждой упорядоченной паре $(x,\ y)$ элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением x и y, причем так, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R}\backslash 0$ является (мультипликативной) абелевой группой.

1.. Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}\backslash 0$ (называемый в случае умножения единицей) такой, что $\forall\ x \in \mathbb{R}\backslash 0$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

2.. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}\backslash 0$ имеется элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}\backslash 0$, называемый обратным, такой, что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3.. Операция • ассоциативна, т.е. для любых x, y, z из $\mathbb{R}\backslash 0$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4.. Операция • коммутативна, т.е. для любых x, y из $\mathbb{R}\backslash 0$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(I, II) Аксиомы сложения и умножения

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, т.е. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$(x + y) \cdot z = xz + yz.$$

(III) Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbb{R}$ имеется отношение $\leq$, т.е. для элементов x, y из $\mathbb{R}$ установлено, выполняется ли $x \leq y$ или нет. При этом должны удовлетворяться следующие условия:

$0_{\leq}$. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad (x \leq x)$.

$1_{\leq}$. $(x \leq y)$ и $(y \leq x) \Rightarrow (x = y)$.

$2_{\leq}$. $(x \leq y)$ и $(y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$.

$3_{\leq}$. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y)$ или $(y \leq x)$.

(I, III) Связь сложения и порядка

Если x, y, z – элементы $\mathbb{R}$, то

$(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$.

(II, III) Связь умножения и порядка в $\mathbb{R}$

Если x, y – элементы $\mathbb{R}$, то

$(0 \leq x)$ и $(0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \cdot y)$.

(IV) Аксиома полноты (непрерывности)

Если X и Y – непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leq y$, то существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $x \leq c \leq y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$.